

Оптимальный транспорт и его приложения

2021

Программа курса

Лектор:

Проф. Колесников Александр Викторович, НИУ ВШЭ

email: sascha77@mail.ru

webpage: <https://www.hse.ru/org/persons/23597497>

Преподаватель семинарских занятий: Колосов Евгений

Необходимая подготовка: математический анализ в объеме двух курсов, теория меры, стандартный курс теории вероятностей и основами стохастического анализа. Желательно знакомство с основами функционального анализа.

Краткое содержание курса:

1. Конечномерное линейное программирование.
Конечномерная транспортная задача. Теорема о двойственности в линейном программировании. Принцип минимакса.
2. Транспортная задача в общей постановке.
Задача Канторовича, задача Монжа. Двойственная транспортная задача. Существование решения задачи Канторовича и двойственной задачи.
3. Циклическая монотонность.
Теорема Рокафеллара. Существование решения в задаче Монжа. Оптимальная транспортировка. Теорема Бренье о декомпозиции.
4. Расстояние в пространстве мер и динамическая интерпретация
Метрики в пространстве мер, связанные с транспортной задачей. Понятие о геодезической в пространстве мер. Теорема Бенаму-Бренье.
5. Выпуклые функционалы и неравенства.
Примеры выпуклых функционалов. Приложения к неравенствам для вероятностных распределений. Гауссовские неравенства.
6. Различные модификации задачи Канторовича.
Задача с многими маргиналами. Примеры, результаты о двойственности. Задача с линейными ограничениями.
7. Финансово-математические мотивации.
Теория Блэка-Шоулза (обзорно). Задача Скорохода, разные типы вложений Скорохода. Модельно независимый подход.
8. Неравенства для мартингалов.
Оценки для мартингалов, возникающие в модельно независимом подходе. Суперхеджирование. Потраекторные мартингальные неравенства.
9. Мартингальная транспортная задача и финансы.
Постановка задачи. Теорема Штрассена. Двойственная задача и ее интерпретация. Теоремы существования.
10. Характеризация решений мартингальной транспортной задачи
Геометрические свойства решений для некоторых классов функций стоимости. Примеры.

11. Другие приложения в финансах и теории вероятностей (обзорно)
Задачи с непрерывным временем: стохастические ДУ и оптимизация.
Многомерный мартингальный оптимальный транспорт. Интерполяции мартингалами. Слабое расстояние Канторовича и его приложения.
12. Приложения в других областях.
Геодезические барицентры (барицентры Васерштейна), связь со статистикой и computer science. Приложения в экономике. Задача монополиста и теория аукционов.

Итоговая оценка

итоговый зачёт/экзамен: 50%,
письменные домашние задания: 50%
дополнительные бонусы: в общей сложности не более 5%.

Книги

1. Villani C., Topics in optimal transportation. Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2003; xvi+370 p.
2. Santambrogio F., Optimal transport for applied mathematicians. Birkhauser/Springer, Cham, 2015;
3. Богачев В.И., Колесников А.В., Задача Монжа-Канторовича: достижения, связи и перспективы. Успехи матем. наук. 2012. Т. 67, (5), 3-110.
4. Galichon A., Optimal transport methods in economics. Princeton University Press, Princeton, 2016; xii+170 p.